

# Klausur zur "Mathematik für Naturwissenschaftler I"

WS 1996/97    Hochsch.-Doz. Dr. H.-D. Meyer

## Aufgabe 1: Differentiation

(8 Punkte)

Differenzieren Sie die folgenden Funktionen. Fassen Sie die Ergebnisse so weit wie möglich zusammen. Es kann dabei zweckmäßig sein, die Funktion vor dem Differenzieren zu vereinfachen!

(a)

$$f_1(x) = \cos^3 ax ;$$

(b)

$$f_2(x) = a \cdot \sin(bx^2) + c \cdot \sin^2(dx) ;$$

(c)

$$f_3(x) = \frac{1-x}{1+x^2} ;$$

(d)

$$f_4(x) = \ln \sqrt{1+x^2} ;$$

(e)

$$f_5(x) = \sqrt{\exp(2 \arctan x)} ;$$

(f)

$$f_6(x) = 5^x \cdot \tan x .$$

## Aufgabe 2: Grenzwerte

(6 Punkte)

Berechnen Sie die folgenden Grenzwerte:

(a)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^2 - 3n + 5}{(n+1)^2} ;$$

(b)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{9^n + 2^{3n}}{3^{2n} + 5} ;$$

(c)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n(\sqrt{n^2 + 7} - \sqrt{n^2 + 1}) .$$

**Aufgabe 3: Komplexe Zahlen**

(5 Punkte)

Schreiben Sie die folgenden Größen als *Realteil* + *i Imaginärteil*:

(a)

$$\frac{(4+i) \cdot (2-4i)}{1-i};$$

(b)

$$\sqrt{\frac{z}{z^*|z|^2} + \frac{z^*}{z|z|^2} - \frac{2}{z^*z}}.$$

**Aufgabe 4: Induktionsbeweis, Reihen**

(6 Punkte)

(a) Beweisen Sie durch vollständige Induktion über  $n$ :

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)} = \frac{n}{n+1}$$

(b) Berechnen Sie den Wert der Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)}$$

(c) Zeigen Sie unter Benutzung von a) und b), daß die Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$$

absolut konvergiert.

**Aufgabe 5: Elementare Funktionen**

(5 Punkte)

Vereinfachen Sie die folgenden Ausdrücke soweit, daß das Ergebnis jeweils aus einer einzigen einfachen elementaren Funktion besteht:

(a)

$$\exp(2 \ln x) ; \quad 1$$

(b)

$$2 \ln a \cdot \left( {}^a\log(a\sqrt{x}) - 1 \right) ; \quad 2$$

(c)

$$1 - (\cos x - \sin x)^2 . \quad 2$$

**Aufgabe 6: Eulerformel**

(4 Punkte)

Unter Benutzung der Eulerschen Formel

$$e^{ix} = \cos(x) + i \sin(x)$$

und der Rechenregel

$$e^{a+b} = e^a \cdot e^b$$

leite man die Additionstheoreme für den Sinus und den Kosinus her.

**Hinweis:** Beginnen Sie mit  $e^{i(x+y)}$  und trennen Sie zum Schluß Real- und Imaginärteil.

**Aufgabe 7: Taylorpolynome**

(6 Punkte)

Gegeben sei die Funktion

$$f(x) = (1+x)^{-1/4}.$$

- (a) Bestimmen Sie das Taylorpolynom 2. Ordnung  $T_2(x)$  für diese Funktion zum Entwicklungspunkt  $x_0 = 0$ . Geben Sie das Polynom explizit an und kürzen Sie gegebenenfalls die Vorfaktoren.
- (b) Geben Sie das (Lagrangesche) Restglied  $R_2(x)$  explizit an.
- (c) Schätzen Sie  $R_2(x)$  für  $x = 1/2$  (optimal) nach oben und unten ab.

**Aufgabe 8: Binomische Formel**

(6 Punkte)

- (a) Schreiben Sie  $(x + y)^5$  als Summe von Potenzen. Werten Sie dabei die Binomialkoeffizienten explizit aus.
- (b) Die Exponentialreihe lautet

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}.$$

Schreiben Sie die Reihe für  $e^{x+y}$  hin und werten Sie  $(x + y)^n$  mit der Binomischen Formel aus.

Ordnen Sie die Reihe um und zeigen Sie so, daß  $e^{x+y} = e^x \cdot e^y$  gilt.

**Hinweis:** Für absolut konvergente Reihen gilt:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n a_{n,k} = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{n=k}^{\infty} a_{n,k}.$$

Wenn Sie dann noch  $j = n - k$  setzen, steht das gewünschte Ergebnis da.

**Aufgabe 9: Polardarstellung, komplexe Wurzel**

(6 Punkte)

- (a) Schreiben Sie  $z = 1 + i\sqrt{3}$  in Polardarstellung.
- (b) Berechnen Sie  $z^3$  unter Benutzung dieser Polardarstellung und geben Sie den Wert in kartesischer Darstellung an.
- (c) Berechnen Sie  $\sqrt{z}$  und geben Sie den Wert ebenfalls in kartesischer Darstellung an.
- (d) Stellen Sie  $z$ ,  $z^3$  und  $\sqrt{z}$  in der Gaußschen Zahlenebene graphisch dar.

**Hinweis:** Trigonometrische Funktionen für besondere Argumente:

x	sin(x)	cos(x)
0	0	1
$\pi/6$	$1/2$	$\sqrt{3}/2$
$\pi/4$	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{2}/2$
$\pi/3$	$\sqrt{3}/2$	$1/2$
$\pi/2$	1	0
$\pi$	0	-1
$3\pi/2$	-1	0

**Aufgabe 10: Rechnen mit Potenzreihen**

(5 Punkte)

Die Taylorreihe von  $\ln(1+x)$  lautet für  $|x| < 1$ :

$$\ln(1+x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} x^k .$$

- (a) Wie lautet die Taylorreihe von  $\ln(1-x)$ ?  
(b) Berechnen Sie die Taylorreihe von

$$f(x) = \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) .$$

**Hinweis:** Sie können alles auf die angegebene Reihe zurückführen.

**Aufgabe 11: Partielle Ableitungen**

(6 Punkte)

- (a) Berechnen Sie  $f_{xx} + f_{yy}$  für

$$f(x, y) = \ln(1 + x^2 + y^2) .$$

- (b) Berechnen Sie  $f_{xyz}$  für

$$f(x, y, z) = y \cdot \tan x \cdot \exp(-z \cot x) + \ln(1 + \sin^2 x + \cos^2 y) .$$

**Hinweis:** Der Satz von Schwartz erlaubt die geschickte Wahl der Reihenfolge der partiellen Ableitungen. Überlegen Sie daher vorher, ob sie zuerst nach  $x$ ,  $y$  oder  $z$  ableiten.